# Séries entières

Préambule : Une série entière est une série de fonctions complexes de la forme $\sum a_n z^n$, $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$a_n$ coefficients de la SE

⚠ $\sum b_n z^{2n}$ $\left|\begin{array}{l} a_n = 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ a_n = b_{n/2} \text{ si } n \text{ pair} \end{array}\right.$

$\sum z^{2^n}$ $\left|\begin{array}{l} a_p = 0 \text{ si } p \notin \{2^n\} \\ a_p = 1 \text{ si } p \in \{2^n\} \end{array}\right.$

## I Rayon de convergence

Donnée : $\sum a_n z^n$ SE

domaine de convergence : $D_a = \{ z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ converge} \}$

Lemme (Abel) : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ : Si $\cancel{\sum}\, a_n z_0^n$ est bornée alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ est ACV

D/ $|z_0| > 0$ (SNG). Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < |z_0|$ et l'on écrit

$$|a_n z^n| = \underbrace{|a_n| |z_0|^n}_{\substack{\text{bornée} \\ (\text{par } M)}} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \text{ or } \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$$

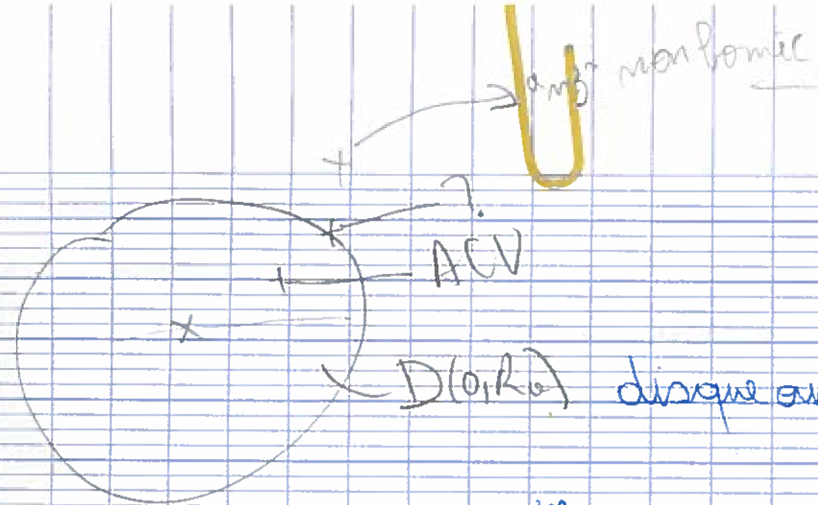
Rayon de CV :

Par déf, il s'agit de : $R_a = \sup \{ r \geq 0 \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée} \}$

Th : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ i) si $|z| < R_a$, la série $\sum a_n z^n$ est ACV
ii) si $|z| > R_a$, la suite $(a_n z^n)$ est non bornée

D/ i) Si $z < R_a$ : $\exists\, r \in ]z, R_a[$ : $|z| < r$ et $a_n r^n$ est bornée donc d'après le lemme d'Abel la série $\sum z^n a_n$ est ACV

ii) si $|z| > R_a$ : $|a_n||z|^n$ est, par déf de $R_a$ non bornée




$D(0,R_a)$ disque ouvert de CV

__Exemples__ ① $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ . $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ | si $|z|<1$ : $S_n(z) \to \frac{1}{1-z}$
| si $|z|\geq 1$ $S_n(z)$ DV

__Obs__: si $|z|=1$, $z\neq 1$, $S_n(z)$ est bornée (~~simplement sur~~ $S^1$) $\hookrightarrow \Lambda = 1$
$\hookrightarrow$ borne dépend de $z$

② : $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ si $|z|<1$ la série AC

si $|z|\geq 1$ par comparaison la série DV

__Obs__: $|z|=1$, $z\neq 1$ (Abel ou ...) : on regarde $(1-z)S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{k+1}}{k}$

donc $(1-z)S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{z^k}{k-1} = z + \sum_{2}^{k} z^k \underbrace{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)}_{-\frac{1}{k(k-1)}} - \frac{z^{n+1}}{n}$

$$\left|\frac{z^k}{k(k-1)}\right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$ la série est ACV

il y a CV de la série sur $S^1 \setminus \{1\}$

__Ex__ | $|z|\leq 1$ : $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = O(n^2)$ la série CV
| $|z|>1$ : $\frac{|z|^n}{n^2} = \frac{e^{\ell n}}{n^2} \longrightarrow +\infty$

page préc. il y a CVN sur $\bar{D}(0,1)$ $R'_a$

__Ex__: ① Mq $R_a = \sup\{|z| \mid \sum a_n z^n \text{ est ACV}\}$

S/ Si $|z|<R_a$, $\sum a_n z^n$ est ACV donc $R'_a \geq R_a$

68

En sens inverse : si $\sum a_n z^n$ est ACV, a fortiori $|a_n||z|^n$ est bornée donc $|z| \leq R_a$ qui est de ce fait un majorant de l'ensemble envisagé $R' \leq R_a$

~~Obs : si $|z| = 1$, $z \neq 1$, $S_n(z)$ est bornée~~

② On suppose que $\sum a_n z_0^n$ est semi convergente, trouver R

S/ $R = |z_0|$ / si $R > |z_0|$, la série $\sum a_n z_0^n$ est ACV, Absurde
{ si $R < |z_0|$, la suite $a_n z_0^n$ est non bornée

Méthodes : ① Avec la définition
② Comparaison
↳ Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geq R_b$
↳ si $|a_n| \sim |b_n|$, $R_a = R_b$

D/ Soit $r \geq 0$, avec $r < R_b$, il vient $\sum b_n r^n$ ACV, a fortiori $b_n r^n$ est bornée. Aussi $a_n r^n$ est bornée donc $r \leq R_a$ par suite $R_b \leq R_a$.

Ex $\exists p > 0$ : $a_n \underset{+\infty}{=} O(n^p)$, Alors $R_a \geq 1$.

En effet $\left( \begin{array}{l} \text{si } r > 1, \ n^p r^n \to +\infty \\ \text{si } 0 \leq r < 1 \ n^p r^n \to 0 \end{array} \right) \underbrace{R\left(\sum n^p z^n\right)}_{\text{Rayon de CV}} = 1$

avec le th $R_a \geq 1$.

On couple le th ② et le th ③ suivant

③ (d'Alembert). Soit $a_n \in \mathbb{C}^{*\mathbb{N}}$ tq la suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ CV vers $\ell \in [0, +\infty[$

Alors $R_a = \frac{1}{\ell}$ $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{0} = +\infty \\ \frac{1}{+\infty} = 0 \end{array} \right.$ (convention)

D/ Par ex $0 < \ell < +\infty$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, notons $u_n = a_n z^n$, il vient :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \xrightarrow{HYP} \ell |z|$$

B) a) i) $|z|\ell<1$ ie $|z|<1/\ell$ $\sum u_n$ est ACV } Série

ii) $|z|\ell>1$ ie $|z|>1/\ell$ $|u_n|\to+\infty$

Ex pers : traiter les autres cas (attention : $|z|=\ell \Rightarrow$ on ne peut rien dire)
(Revoir DA de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ - Duhamel)

Ex Soit $P\in\mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$ si $a_n=O(P(n))$ alors $\ell\left(\sum a_n z^n\right)\geq 1$.

D/ Soit $b_n=P(n)$, non nulle à PCR, on a $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{P(n+1)}{P(n)}\right|=1$
De là $\ell\left(\sum b_n z^n\right)=1$, on applique le th précédent !

Ex On suppose qu'il existe $\alpha>0$ tq $a_n=O\left(\frac{1}{(n!)^\alpha}\right)$

Alors $\ell\left(\sum a_n z^n\right)=+\infty$

D/ $b_n=\frac{1}{(n!)^\alpha}$ ; $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{(n+1)^\alpha}\to 0$ donc $R_b=+\infty$
puis $R_a\geq R_b$
donc $R_a=+\infty$

⚠ $\sum z^{2^n}$

# III Régularité

## A) Continuité complexe

Th : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R_a$ et $f\left(\begin{array}{l} D(0,R_a)\to\mathbb{C} \\ z\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\end{array}\right)$

i) Pour tout compact $K\subset D(0,R_a)$ $\sum a_n z^n$ CVN sur $K$

ii) $f$ est $\mathcal{C}^0$ sur $D(0,R_a)$

D/ i) $K\neq\emptyset$, $\ell=\sup\limits_{z\in K}|z|$ (max) est atteint par continuité de $|\cdot|$ et

compacité de $K$ : $\ell=|z_0|$, $z_0\in K\subset D(0,R_a)$. Aussi $\ell<R_a$

donc $\sum|a_n|\ell^n$ CV et $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall z\in K$, $|a_n z^n|\leq|a_n|\ell^n$

Ce qui assure la CVN

ii) Soit $z_0 \in D(0, R_a)$. Soit $\rho : |z_0| < \rho < R_a$. Alors
* la série $\sum a_n z^n$ CVN sur $\overline{D}(0, \rho)$
* $\overline{D}(0,\rho)$ est un voisinage de $z_0$

les fonctions en jeu étant $C^0$, $f$ est $C^0$ en $z_0$

⚠ On ne peut rien dire sur $C(0, R_a)$, il y a le cas simple suivant si $R_a < +\infty$ et $\sum |a_n| R_a^n$ CV, il y a CVN sur $\overline{D}(0, R_a)$ et $f$ y est continue

C) Régularité réelle.

<u>Lemme</u> : Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon $R > 0$

Alors le rayon de $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ est $R$

D/ • Soit $z \neq 0$ tq $\sum a_{n+1}(n+1) z^n$ CV, il vient $\sum_{n \geq 1} (n+1) a_{n+1} |z|^{n+1}$ CV

et $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_{n+1} z^{n+1}| \leq (n+1) |a_{n+1}| |z|^{n+1}$

aussi $\sum a_n z^n$ CV : $\rho\left(\sum (n+1) a_{n+1} z^n\right) \leq \rho\left(\sum a_n z^n\right)$

•• Si $|z| < R_a$ : on intercale $\rho$ : $|z| < \rho < R_a$

$$\left|(n+1) a_{n+1} z^n\right| = \left|(n+1) a_{n+1} \frac{z^n}{\rho^{n+1}}\right| |\rho^{n+1}| = \underbrace{\frac{1}{\rho} |a_{n+1} \rho^{n+1}|}_{\text{borné}} (n+1) \left|\frac{z}{\rho}\right|$$

aussi $|z| < \rho\left(\sum (n+1) a_{n+1} z^n\right)$

$$R_a \leq \rho\left(\sum (n+1) a_{n+1} z^n\right) \quad \text{CQFD}$$

Cor : $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{R}\left(\sum (n+k)\cdots(n+1)\, a_{n+k} z^n\right) = \mathcal{R}\left(\sum a_n z^n\right)$

Th : On suppose $R_a = \mathcal{R}(\sum a_n z^n) > 0$, soit $f \left( \begin{array}{l} ]-R_a, R_a[ \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right)$

1) $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in ]-R_a, R_a[$ $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0} (n+k)\cdots(n+1) a_n x^n$

2) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ie $\sum a_n z^n$ est la série de T aylor de $f$

D/ 1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour $x \in ]-R_a, R_a[$ on $u_n(x) = a_n x^n$

Objectif : CVU locale de la série de terme tq $u_n^{(k)}$. Soit $x_0 \in ]-R_a, R_a[$,

prenons $\ell$ : $|x_0| < \ell < R_a$

$* \; \overline{D}(0, \ell)$ $[-\ell, \ell]$ est un voisinage de $x_0$ : $[\ell$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-\ell, \ell]$, $|u_n^{(k)}(x)| = n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}$

$\leq n(n-1)\cdots(n-k+1) |a_n| \ell^{n-k}$

par le Lemme (dérivée) cette série converge (norm)

$**$ La série de tq $u_n^{(k)}$ CVN sur $[-\ell, \ell]$, ceci est valable pour tout $k \geq 1$, de là, $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de tout point de $[-\ell, \ell]$ et dérivable terme à terme, 2) évaluation en 0

⚠ Réciproque fausse : une fonction $\mathcal{C}^\infty$ peut très bien être non développable en séries entières

$f = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$

$f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ de plus $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{x^{3p}} e^{-\frac{1}{x^2}}$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ $f^{(p)}(x)$ possède la limite 0 en 0

En effet : posons $y = \frac{1}{x}$ il vient $f^{(p)}(y) = e^{-y^2} y^{3p} Q_p\left(\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[\pm\infty]{} 0$

On prolonge $f$ par $\mathcal{C}^0$, $f'$ possède la limite 0 en 0 donc $f$ est $\mathcal{C}^1$ et $f'(0)=0$

$(H_n)$ $f$ est $\mathcal{C}^n$ et $f(0)=\dots=f^{(n)}(0)=0$

th de prolongement dérivable

On regarde $f^{(n)}$ : elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\exists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(n+1)}(x)=0$

Alors $f^{(n)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)}(0)=0$ $(H_n)\Rightarrow(H_{n+1})$

La récurrence est terminée, d'où le résultat

**Bilan** : $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $f^{(n)}(0)=0$, la série de Taylor de $f$ donne SE de rayon $+\infty$, mais

$$\forall x\neq 0 \quad f(x)\neq\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$$

RM On a bien $\forall n\in\mathbb{N}$ $f(x)\underset{0}{=}o(x^n)$

⚠ Le DL est non uniforme en $n$

**Cor** : Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux SE de R de CV $R_a>0$ et $R_b>0$
Si leurs sommes resp. $f_a$ et $f_b$ coïncident sur un voisinage de 0
alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n=b_n$

D/ (HYP) $\exists\varepsilon\in]0,\min(R_a,R_b)[$ $\forall x\in]-\varepsilon,\varepsilon[$ $f_a(x)=f_b(x)$

Delà $\forall n\in\mathbb{N}$ $\underbrace{f_a^{(n)}(0)}_{n!\,a_n}=\underbrace{f_b^{(n)}(0)}_{n!\,b_n}$

## III Developpements en série entière

### A) Opérations :

combi lin

CL $\sum a_n z^n$ de rayon $R_a$ de somme $f_a$
$\sum b_n z^n$ —— $R_b$ —— $f_b$ $\quad|\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$

Alors $\sum(\lambda a_n+\mu b_n)z^n$ est de rayon $\geq\min(R_a,R_b)$

et $\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b))$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n = \lambda f_a(z) + \mu f_b(z)$

D/ si $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont ACV
donc $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ est ACV

⚠ $b_n = -a_n$ ......

Ex: Si $R_a \neq R_b$ $\mathcal{R}\left(\sum (a_n + b_n) z^n\right) = \min(R_a, R_b)$

S/ par ex $0 < R_a < R_b$
Soit $r$ : $R_a < r < R_b$, la suite $(a_n + b_n) r^n$ est la somme de la suite non bornée $a_n r^n$ et $b_n r^n \to 0$, elle est non bornée
Delà $r \geq R$, $r$ quelconque dans $]R_a, R_b[$ $R_a \geq R$ d'où l'égalité

Produit. Th: Les données sont les mêmes. On note $c = a * b$
ie $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

$\mathcal{R}\left(\sum c_n z^n\right) = R_c \geq \min(R_a, R_b)$ et $\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b))$

et $f_c(z) = f_a(z) f_b(z)$

D/ Soit $z$ : $|z| < \min(R_a, R_b)$. Alors $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$
sont CV

Les suites $(a_k z^k)$ et $(b_l z^l)$ sont sommables leur produit de Cauchy l'est aussi. $c'_n = \sum_{\substack{k+l=n \\ k \geq 0, l \geq 0}} a_k b_l z^{k+l} = c_n z^n$ et l'on a

partitions → (Sommation par paquets)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Conséquence : $\{f \in \mathcal{C}(D(0,R),\mathbb{C}) \mid \exists a_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\ f = f_a \text{ sur } D(0,R)\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(D(0,R),\mathbb{C})$

Formule importante On pose $A_n = a_0 + \dots + a_n$. Alors

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, 1)) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n \text{ est ACV}$$

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

D/ Si $|z| < 1$ $\frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ $\begin{cases} b_n = 1 \\ a * b = (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$

## B) DSE usuels

Th : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R_a > 0$, de somme $f_a$.
Alors $\forall x \in ]-R_a, R_a[$, $\int_0^x f_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

D/ Il y a CVN sur $[0,x]$, on peut donc intégrer terme à terme
$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0} a_n \int_0^x t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Groupe 1 : Série géométrique

$$x \in ]-1,1[ \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Intégration TAT, $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ donc } \operatorname{Arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

## Dérivation TAT :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p)} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^{n+p}\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p) \cdots (n+1) x^n$$

$$\frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p) \ldots (n+1) x^n$$

et donc $\displaystyle \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$

**Ex :** Calcul de $\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) 2^{-n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$

**Argth** : c'est la fct définie sur $]-1,1[$ : $x \longmapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\operatorname{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2} \underset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

$$\operatorname{Argth} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

## Groupe II : exponentielle réelle :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Taylor : $\displaystyle e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!} \to 0}$ $\quad \theta \in ]0,1[$ Taylor Lagrange

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\theta + (2n+1)\pi/2)}_{\to 0}, \quad \theta \in ]0,1[$$

Exo Mq $\frac{x}{\sin x}$ possède un prol $\mathcal{C}^\infty$ en $0$ (Mines-Centrale)

$f(x) = \frac{\sin x}{x}_{x \neq 0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n} \times (-1)^n}{(2n+1)!}$ Somme de SE $\to \mathcal{C}^\infty$ en $0$

$\tilde{f}$ ne s'annule pas sur $]-\pi, \pi[$, $\frac{1}{\tilde{f}}$ y est $\mathcal{C}^\infty$

Séries hypergéométriques (Antoine)

Lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et $x \in ]-1,1[$ on a :

déf

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}}_{u_n} x^n$$

$\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to 1$

$u_n$ : ne s'annule jamais

$$(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-1)^n x^n$$

On $\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}$ Wa

$$= (-1)^{n-1} \frac{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n n!}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} n! (n-1)!}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n 2^{2n-1}}$$

$$(1-x)^{1/2} = 1 - x - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n 2^{2n-1}} x^n$$

- **Ex** Série pareil avec $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, puis $\arcsin x$

c) Exponentielle complexe

On pose, pour $z \in \mathbb{C}$ $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$ avec d'Alembert

$z = x \in \mathbb{R}$, exp usuelle

$z = ix$, $x \in \mathbb{R}$ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

|| On a $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$

Cauchy les séries $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum \frac{z'^n}{n!}$ sont ACV

Si $c = a * b$ $\sum (c_n)$ CV et $\left(\sum_0^{+\infty} c_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$

$\rightarrow c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k z'^{n-k}$

$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z+z')^n = \exp(z+z')$

|| $e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x \cdot e^{iy}}_{\text{exp}}$